ΟΜΟΙΑ ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ 2 ΙΣΧΥΕΙ ΚΑΙ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^m$.

<u>πχ</u>

$f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$, $x \in U$ είναι <u>μερ. διαφορ.</u> στο x, αν $\exists\, J_f(x) = \left(\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)(\bar{x})\right)$ $j=1,\dots m$ (γραμ.) με $f=(f_1,f_2,\dots,f_m)^T$, $x=(x_1,x_2,\dots,x_n)$ $i=1,\dots,n$ (στηλ.) είναι διαφορίσιμη στο x.

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u>

Η $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοικτό λέγεται συνεχώς διαφορ. αν $\forall x \in U$ $\exists\, Df(x) \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $Df: U \to \mathbb{R}^{m\times n}$ συνεχής δηλ. εάν $\forall i,j = 1,2,\dots n(\,m)$ τα στοιχεία του πίνακα $\frac{\partial f_j}{\partial x_i}: U \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συναρτήσεις δηλ. εάν $f \in C^1(U;\mathbb{R}^m)$. Άρα $f \in C^1(U;\mathbb{R}^m) \Leftrightarrow f$ συνεχώς διαφ.

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ:</u>

Όταν λέμε ότι η f είναι συνεχώς διαφορίσιμη στο $x_0 \in U$ (U ανοικτό), θα εννοούμε πως ο ορισμός ενώ στο $B(x_0,\delta) \subseteq U$ ($\delta>0$) είναι συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση

Άρα, (συνολικά) Για μια $f: U \to \mathbb{R}^m$, $U \subseteq \mathbb{R}$ ανοικτό μπορούν να ισχύουν τα παρακάτω:

- f συνεχώς διαφορίσιμη $\Rightarrow$ f διαφορίσιμη $\Rightarrow \begin{cases} f \text{ συνεχής} \\ f \text{ μερ. διαφορ} \end{cases}$
  $(f \in C^1(U; \mathbb{R}^m))$

ΑΣΚΗΣΗ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

① $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

② $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ ③ $f(x,y) = \dfrac{x \cdot y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

④ $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2) \sin \dfrac{1}{\sqrt{y^2+x^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

ΛΥΣΗ

① Στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{y(x^2+y^2) - x \cdot y \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^3 - y \cdot x^2}{(x^2+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{x^3 - xy^2}{(x^2+y^2)^2}, \quad f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$$

$f/_{\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}}$ συνεχώς διαφορ $\Rightarrow$ διαφορ $\Rightarrow \begin{cases} \text{συνεχής} \\ \text{μερικά διαφορ} \end{cases}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{0-0}{h} = 0$$

ομοια $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = 0$

Η f μερικώς διαφορ στο $(0,0)$ με $\nabla f(0,0) = (0,0)$

Εξετάζουμε ως προς την (ολική) διαφορισιμότητα

$$\lim_{(x,y) \to (0,0)} \frac{f(x,y) - f(0,0) - \nabla f(0,0) \cdot (x,y)}{\|(x,y)\|}$$

Εξετάζουμε αν $\exists \lim\limits_{(x,y) \to (0,0)} \dfrac{x \cdot y}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

προφανώς δεν υπάρχει επιλέγοντας τις ακολουθίες

:

$$\bullet\ \frac{f(\frac{1}{\nu},0)}{\|(\frac{1}{\nu},0)\|} = 0 \to 0$$

$$\bullet\ \frac{f(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu})}{\|(\frac{1}{\nu},\frac{1}{\nu})\|} = \frac{(\frac{1}{\nu})^2}{(2(\frac{1}{\nu})^2)^{3/2}} = \frac{1}{2^{3/2}} \to \infty$$

Άρα, f όχι διαφορίσιμη στο $(0,0) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ f όχι συνεχώς διαφορίσιμη στο $(0,0)$

Παρατήρηση $\to$ Η f ασυνεχής στο $(0,0)$
Διότι $\nexists \lim\limits_{(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$

②

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\end{aligned}\right| \quad (x,y) \neq (0,0)$$

$$\Rightarrow f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$$

το όριο αυτό δεν υπάρχει άρα η
f μη μερ. παραγωγίσιμη στο $(0,0)$
Λόγω συμμετρίας το ίδιο ισχύει και
για την $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) \Rightarrow$ f όχι διαφορίσιμη

Αλλά είναι συνεχής αφού $(x,y) \mapsto \|(x,y)\|$ συνεχής
που είχε αποδειχτεί παλαιότερα.

(3)

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2+y^2} - x\cdot y\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}, \quad (x,y)\neq(0,0)$$

ομοια

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2} - x\cdot y\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}, \quad (x,y)\neq(0,0)$$

Στο $(0,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = 0 =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(0,y)-f(0,0)}{y}.$$

$\boxed{\nabla f(0,0)=(0,0)}$ f μερ. διαφ. $(0,0)$

Είναι διαφορίσιμη στο $(0,0)$;

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{f(x,y)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} =$$

$$= \lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x\cdot y}{x^2+y^2}$$ Δεν υπάρχει από (1)

Η f συνεχής στο $(0,0)$: $|xy| \leq \frac{x^2+y^2}{2}$

$(\Leftrightarrow (|x|-|y|)^2 \geq 0)$.

άρα $0 \leq |f(x,y)| = \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} \leq \frac{1}{2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{1}{2}\|(x,y)\|$

$\to 0 \leftarrow$

Από. Θ. Ισοσυγκλίνουσων συναρτήσεων

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) - (0,0) = f(0,0)$$

(4) όμοια θα δούμε ότι η $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$
ενώ $\nabla f(0,0) = (0,0)$ αν παραμείνει τον ορισμό
και μάλιστα $Df(0,0) = \nabla f(0,0)$ δηλ. η
f διαφορ. στο $(0,0)$ αλλά η Df που $\exists$ στο $\mathbb{R}^2$
είναι ασυνεχής στο $(0,0)$